Teorem 8.5.5 : $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n),\ (\alpha_n > -1,\ n \in \mathbb{N})$*çarpımının mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *serisinin mutlak yakınsak olmasıdır.*

Örnek 8.5.6 :*Aşağıdaki çarpımların yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.*

(a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right),\ (\alpha > 0)$; *(b)* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right),\ (\alpha > 0)$;

Çözüm: **(a)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ serisi $\alpha > 1$ için yakınsak ve $0 < \alpha \leq 1$ için ıraksak olduğundan 5° gereği verilen sonsuz çarpım $\alpha > 1$ için yakınsak ve $0 < \alpha \leq 1$ için ıraksaktır.

(b) $\alpha > 1$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ serisi yakınsak olduğundan verilen çarpım $\alpha > 1$ için mutlak yakınsaktır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ serileri $0 < \alpha \leq 1$ için koşullu yakınsak olduğundan, verilen çarpım $0 < \alpha \leq 1$ için koşullu yakınsaktır (**6**° gereği). ⋄

8.6 Çözümlü Problemler

(1) Aşağıdaki serilerin toplamlarını bulunuz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25n^2+5n-6}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n,\ (|\ q\ |< 1)$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5^n}$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^{2n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2.3^{n-1}}\right)$;

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$.

Çözüm:

(a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}\Big)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4.1-3} - \frac{1}{4.1+1}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4.2-3} - \frac{1}{4.2+1}\Big)\\
&+ \cdots + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4n+1}\Big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4n+1}\Big)\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}$$

tür.

(b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\Big)$

$$\begin{aligned}
&= \Big(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\Big) + \Big(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)\\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ olduğu ve dolayısıyla,verilen serinin yakınsak ve toplamının 1 olduğu anlaşılır.

(c) $25n^2 + 5n - 6 = (5n-2)(5n+3)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{25k^2 + 5k - 6} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{5k-2} - \frac{1}{5k+3}\Big)\\
&= \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}\Big)\\
&= \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}\Big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 5n - 6} = \frac{1}{15}$$

dir.

(d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) \\ &+ \cdots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$$

dir.

(e) $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k = q + 2q^2 + \cdots + nq^n \Rightarrow S_n - S_n q$

$$\begin{aligned} &= (q + 2q^2 + \cdots + nq^n) - (q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-1)q^n + nq^{n+1}) \\ &= q + q^2 + \cdots + q^n - nq^{n+1} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1} \\ &\Rightarrow (1-q)S_n = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1} \\ &\Rightarrow S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

[$|q| < 1$ iken $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$ olduğundan]

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2} \Rightarrow |q| < 1 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{nq}^{\mathrm{n+1}} = \frac{\mathrm{q}}{(1-\mathrm{q})^2}$$

dir.

(f) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{5^k} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k}$

$$\begin{aligned} &= 2\Big(\frac{\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^2} - \frac{(\frac{1}{5})^{n+1}}{(1-\frac{1}{5})^2} - \frac{n(\frac{1}{5})^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}\Big) + \frac{(\frac{1}{5}-\frac{1}{5})^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 2\frac{\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{7}{8} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5^n} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

dir.

(g) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1-(-\frac{1}{3})^n}{1-(\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{3}{4}$$

tür.

(h) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2^{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1}}{2.3^{k-1}}\right) = \frac{51}{8} - \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{8.3^{n-1}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{51}{8}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2.3^{n-1}}\Big) = \frac{51}{8}$$

dir.

(i) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ den

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{2^k}.\cos\frac{3}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sin\frac{1}{2^{k-2}} - \sin\frac{1}{2^{k-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin 2 - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\Big) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\sin 2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\sin 2 \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}.\cos\frac{3}{2^n} = \frac{1}{2}\sin 2 \end{aligned}$$

dir. $\diamond$

(2) Genel terimleri aşağıdaki şekilde verilen serilerin yakınsak olduklarını gösteriniz ve toplamlarını bulunuz.

(a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$; (b) $a_n = \frac{1}{n(n+p)}$, $(p \in \mathbb{N})$;
(c) $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$; (d) $a_n = \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$.

Çözüm: (a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+3)-n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olduğundan, $b_n = -\frac{1}{3n(n+1)(n+2)}$ dersek $a_n = b_{n+1} - b_n$ olduğu elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) \\ &= b_{n+1} - b_1 = -\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{18} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

olur. Demek ki, genel terimi $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ olan seri yakınsak ve toplamı $\frac{1}{18}$ dir.

(b) $\frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+p}\right) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \frac{1}{p}\sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, genel terimi $a_n = \frac{1}{n(n+p)}$ olan seri yakınsak ve toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right)$$

dir.

(c) $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+5}\Big)\frac{1}{2n+3}$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(2n+5)(2n+3)}$$

olduğundan, $b_n = -\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ dersek $a_n = b_{n+1} - b_n$ olduğu elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \\ &= \frac{1}{60} - \frac{1}{4(2n+3)(2n+5)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{60}$ olduğu ve dolayısıyla, genel terimi $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ olan seri yakınsak ve toplamı $\frac{1}{60}$ tır.

(d) $a_n = \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)} = \frac{n+(n+1)+(n+4)-1}{n(n+1)(n+4)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \frac{1}{n(n+4)} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+4)} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+4)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\Big) \Rightarrow \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}\Big)\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{2}{3}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}\Big) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\Big) \\ &+ \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{n+4}\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{3}\Big(\frac{13}{12} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\Big) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{2}{3}.\frac{13}{12} = 1 + \frac{13}{18} = \frac{31}{18} \end{aligned}$$

olur. Demek ki, genel terimi $a_n = \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$ olan seri yakınsak ve toplamı $\frac{31}{18}$ dir. $\diamond$

(3) Aşağıdaki serilerin ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n+3}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (0,03)^{\frac{1}{n}}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+2}{5n+1}}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n^2+5n+5}{2n^2+1}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2}$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-1}{3n^3+2}\right)^{n^3}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$; (k) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln \frac{n^2+1}{n^2}$; (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}$;

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Çözüm: Problemlerin çözümünde pozitif terimli (a_n) dizisi ıraksak veya $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksatır önermesinden yararlanacağız.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n+3} = \frac{2}{5} \neq 0$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

(b) $\lim_{n\to\infty} (0,03)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+2}{5n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3+\frac{2}{n}}{5+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \neq 0$ olduğundan, verilen seri ıraksaktır.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \neq 0$ olduğundan, verilen seri ıraksaktır.

(e) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{3n^2+5n+5}{2n^2+1}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = -\lim_{k\to\infty} \frac{3(2k)^2+5(2k)+5}{2(2k)^2+1} = -\frac{3}{2},$$
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3(2k-1)^2+5(2k-1)+5}{2(2k-1)^2+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

(a_n) ıraksaktır. Buna göre, verilen seri ıraksaktır.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2n}{n+1}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^{-2} \neq 0$ olduğundan, verilen seri ıraksaktır.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n} = +\infty \Rightarrow \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)$ dizisi ıraksak ve dolayısıyla, verilen seri ıraksaktır.

(h) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^2} = \frac{n!(n+1)\cdots(2n)(2n+1)\cdots(3n)}{(n!).(n!)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n+1)\cdots(2n)(2n+1)\cdots(3n)}{n!} > \frac{(n!).(n!)}{n!} \\ &= n! \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \end{aligned}$$

$\left(\frac{(3n)!}{(n!)^2}\right)$ dizisi ıraksak ve dolayısıyla, verilen seri ıraksaktır.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-1}{3n^3+2}\right)^{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{3n^3+2}\right)^{-\frac{3n^3+2}{3}}\right]^{-\frac{3}{3n^3+2}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3}{3n^3+2}} =$ $e^{-1} \neq 0$ olduğundan, verilen seri ıraksaktır.

(j) 2. L'Hoppital kuralı gereğince,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln^2(x+1)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}}{\ln(x+1)} \\ &= \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{18}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}}-2\frac{x+1}{x^{\frac{5}{3}}}\right) \end{aligned}$$

$[\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to\infty}(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}) = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^{\frac{5}{3}}} = 0$ olduğundan$]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)} = +\infty \Rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}\right)$ dizisi ıraksak ve dolayısıyla, verilen seri ıraksaktır.

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = 1.\ln e = 1 \neq 0$ olduğuna göre, verilen seri ıraksaktır.

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{(n+3)(n^2+2)}.\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2)\arcsin\frac{1}{n^2+2}$

$$= \lim_{n\to\infty}(n^2+2)\arcsin\frac{1}{n^2+2}$$

[2. L'Hospital kuralına göre]

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \arcsin\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^{-4}}}\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = 1$$

olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2} = 1 \neq 0$ olduğuna göre, verilen seri ıraksaktır.

(m) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0$$

olduğuna göre, verilen seri ıraksaktır. ⋄

(4) Cauchy yakınsaklık kriterini kullanarak aşağıdaki serilerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n},\ x\in\mathbb{R}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)},\ (x\in\mathbb{R})$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n},\ x\in\mathbb{R}$.

Çözüm: (a) $a_n = \frac{\cos nx}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$ olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall p\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\ &\le \frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

olduğuna göre, herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde, $n_\varepsilon = [\![\log_2\frac{1}{\varepsilon}]\!]+1$ dersek $\forall n\ge n_\varepsilon$ ve $\forall p\in\mathbb{N}$ için

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| < \varepsilon$$

olduğu elde edilir. O halde, Cauchy kriteri gereğince bu seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

(b) $a_n = \frac{\sin nx}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \\
&+ \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

olduğuna göre, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $n_\varepsilon = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$ dersek $\forall n \geq n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

olduğu elde edilir. O halde, Cauchy kriteri gereğince verilen seri $\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

(c) $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$

$$
\begin{aligned}
&= \cos x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-1}\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3-1}\right)\cos 3x + \cdots + \\
&+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\cos nx - \frac{\cos(n+1)x}{n} \\
&= \cos x - \frac{\cos(n+1)x}{n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(k-1)}
\end{aligned}
$$

ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n+1)x}{n} = 0$ olduğuna göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} \quad \text{ve} \quad \sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \frac{\cos \mathrm{nx}}{\mathrm{n(n-1)}}$$

serilerinin karakterleri aynıdır. (b) ye benzer olarak gösterilebilir ki, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)}$ serisi $\forall x \in \mathbb{R}$ için Cauchy kriteri gereğince yakınsaktır. Buna göre, verilen seri de $\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. $\diamond$

(5) Cauchy kriterinin değilinden yararlanarak aşağıdaki serilerin ıraksak olduklarını gösteriniz.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}\ ; \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}\ ;$$
$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\ ; \quad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) .$$

Çözüm: (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{3(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{3(n+p)+1} > \frac{p}{3(n+1)+1}$$

olduğundan, $p = n$ için

$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \frac{n}{3(n+1)+1} > \frac{1}{7}$$

bulunur. Demek ki, $\varepsilon = \frac{1}{7} > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \varepsilon$ olduğu, dolayısıyla, verilen serinin Cauchy kriteri gereğince ıraksak olduğu anlaşılır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} &= \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} + \frac{(n+2)+1}{(n+2)^2+2} + \cdots \\ &+ \frac{(n+p)+1}{(n+p)^2+2} > p\frac{(n+p)+1}{(n+p)^2+2} \end{aligned}$$

olduğuna göre, $p = n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} > \frac{2n^2+n}{4n^2+2} = \frac{1}{2}\frac{2n^2+n}{2n^2+1} \geq \frac{1}{2}$$

olur. Demek ki, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \varepsilon$ olduğu, dolayısıyla, verilen serinin Cauchy kriteri gereğince ıraksak olduğu anlaşılır.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\ &\geq \frac{2}{(n+1)+(n+2)} + \cdots + \frac{2}{(n+p)+(n+p+1)} \\ &> \frac{2p}{2(n+p)+1} \end{aligned}$$

olduğuna göre, $p = n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \frac{2n}{4n+1} > \frac{2}{5}$$

bulunur. Demek ki, $\varepsilon = \frac{2}{5} > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \varepsilon$ olduğu, dolayısıyla, verilen serinin Cauchy kriteri gereğince ıraksak olduğu anlaşılır.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} &= \ln\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) + \cdots + \ln\Big(1 + \frac{1}{n+p}\Big) \\ &> p\ln\Big(1 + \frac{1}{n+p}\Big) = \ln\Big(1 + \frac{1}{n+p}\Big)^p \\ &> \ln\Big(1 + \frac{p}{n+p}\Big) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $p = n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \ln\Big(1 + \frac{n}{n+n}\Big) > \ln\frac{3}{2}$$

bulunur. Demek ki, $\varepsilon = \ln\frac{3}{2} > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} + \cdots + a_{2n} > \varepsilon$ olduğu, dolayısıyla, verilen serinin Cauchy kriteri gereğince ıraksak olduğu anlaşılır. $\diamond$

(6) Teorem 8.2.2 den yararlanarak aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$.

Çözüm: (a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. (S_n) dizisinin $S_2 = 1 + \frac{1}{3}, S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}, \cdots, S_{2^n} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}, \cdots$ terimlerinden oluşan (S_{2^n}) alt dizisini gözönüne alalım. $1 + \frac{1}{3} > 1$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) \\ &> 1 + \frac{n-1}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, (S_{2^n}) dizisi ve dolayısıyla (S_n) dizisi üstten sınırsız, yani (S_n) ıraksaktır. Demek ki, verilen seri ıraksaktır.

(b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} < \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{7\sqrt{8}} < \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{4\sqrt{4}} < \frac{4}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}} + \cdots &+ \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}} < \frac{1}{2^n\sqrt{2^n}} + \cdots \\ &+ \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}-1}} \\ &< \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$
\begin{aligned}
S_{2^{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \Big(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}}\Big) + \Big(\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{1}{6\sqrt{7}} + \frac{1}{7\sqrt{8}}\Big) + \\
&+ \cdots + \Big(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\Big) \\
&< \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{2})^n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\Big(1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\Big) < \frac{1}{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. (S_n) artan ve üstten sınırlı olduğuna göre, (çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n < S_{2^n} < \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ dir.) verilen seri yakınsaktır.

(c) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1.3}} + \frac{1}{\sqrt{3.5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

$$
\begin{aligned}
&> \frac{2}{1+3} + \frac{2}{3+5} + \cdots + \frac{2}{2n-1+2n+1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}\Big(\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\ln(n+1)
\end{aligned}
$$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$ olduğuna göre, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ olur. Demek ki, verilen seri ıraksaktır.

(d) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\frac{\sin^4 2k}{(k+1)(k+2)} \le \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$ olduğuna göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^4 2k}{(k+1)(k+2)} \le \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. (S_n) dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsak, dolayısıyla, verilen seri de yakınsaktır. $\diamond$

(7) Terimleri negatif olmayan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) serisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ (A') serisi de yakınsaktır. Gösteriniz. Bunun karşıtıda doğrumudur? (a_n) monoton ise karşıtı için ne dersiniz?

Çözüm: (A) serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun (yani, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ olsun). (A) yakınsak olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n \leq S$ olacak şekilde bir $S > 0$ sayısı vardır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ (A') serisinin n. kısmi toplamı $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ olsun. $\forall k = 1, 2, \cdots, n$ için $\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$ olduğuna göre,

$$S'_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1}) = \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1} - a_1) \leq \frac{1}{2}(2S - a_1)$$

olduğu elde edilir. Pozitif terimli (A') serisinin (S'_n) kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlı olduğundan, Teorem 8.2.2 gereğince yakınsaktır.

Bu önermenin karşıtı genellikle doğru değildir. Örneğin, terimleri

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \text{ ise,} \\ \frac{1}{k}, & n = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için (A') serisi yakınsak (çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{a_n a_{n+1}} = 0$ dır) fakat (A) serisi ıraksaktır (çünkü, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ ıraksaktır).

(a_n) monoton azalan (artan) bir dizi, yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$

$$a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \leq a_n$$

$$\left(a_n \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \leq a_{n+1}\right)$$

olacağından Teorem 8.2.4 gereğince (A) ve (A') serilerinin karakterleri aynıdır. $\diamond$

(8) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) serisi yakınsak olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (A) yakınsak olduğuna göre, Cauchy kriteri gereğince $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_\varepsilon$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$0 < a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. (a_n) monoton azalan bir dizi olduğuna göre buradan $pa_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğu elde edilir. Buna göre, $\forall n \geq n_\varepsilon$ için $p = n$ ve $p = n+1$ dersek sırasıyla $2na_{2n} < \varepsilon$ ve $(2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$ bulunur. Demek ki, $\forall n \geq 2n_\varepsilon$ için $na_n < \varepsilon$ ve dolayısıyla, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ olduğu anlaşılır. $\diamond$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif tanımlı serisi yakınsak ve $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ serisinin n. kısmi toplamı $S'_n = \frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \cdots + \frac{S_n}{n}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n \geq S_1$ olduğundan

$$S'_n \geq \frac{S_1}{1} + \frac{S_1}{2} + \cdots + \frac{S_1}{n} = S_1\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big)$$

ve $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) = +\infty$ olduğuna göre, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = +\infty$ olur. Demek ki, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ serisi ıraksaktır.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif tanımlı serisi yakınsak olsun. $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. $\diamond$

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}} = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \\ &= (\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})\frac{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}{\sqrt{R_{n-1}}} \\ &\leq 2(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}) \qquad (8.15) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n})$ serisinin n. kısmi toplamı

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{R_{k-1}}-\sqrt{k_n}) \\ &= (\sqrt{R_0}-\sqrt{R_1})+(\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2})+\cdots+(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n}) \\ &= (\sqrt{R_1}-\sqrt{R_n}) \end{aligned}$$

dır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır [Sonuç 8.2.4 den] $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \sqrt{R_1} - \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{R_n} = \sqrt{R_1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n})$
yakınsaktır [(8.15) e göre Teorem 8.2.4 ten] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ yakınsaktır. $\diamond$

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif tanımlı serisi ıraksak ve $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} &\geq \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}} \\ &= \frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}} = 1-\frac{S_n}{S_{n+p}} \end{aligned}$$

yazabiliriz. $\sum a_n$ ıraksak olduğundan, $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = +\infty$ olur. Son eşitsizlikte n' i sabit tutarak $p \to \infty$ iken limite geçersek

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\right) \geq 1 - S_n \lim_{p\to\infty}\frac{1}{S_{n+p}} = 1$$

olduğu elde edilir. Buradan Cauchy kriteri gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ serisinin ıraksak olduğu anlaşılır. $\diamond$

(12) Terimleri negatif olmayan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^{1+\varepsilon}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sum a_n$ ve $\sum {a_n}^{1+\varepsilon}$ serilerinin n. kısmi toplamları sırasıyla S_n ve S'_n olsun. $\sum a_n$ yakınsaktır $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq S_n \leq S$ olacak şekilde $S > 0$ sayısı vardır. O zaman,

$$S'_n = {a_1}^{1+\varepsilon} + {a_2}^{1+\varepsilon} + \cdots + {a_n}^{1+\varepsilon}$$

$$\leq \begin{cases} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{1+\varepsilon}, & \varepsilon > 0 \text{ sayısı tam ise,} \\ (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{2+[[\varepsilon]]}, & \varepsilon > 0 \text{ sayısı tam degilse} \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} S^{1+\varepsilon}, & \varepsilon > 0 \text{ sayısı tam ise,} \\ S^{2+[[\varepsilon]]}, & \varepsilon > 0 \text{ sayısı tam degilse} \end{cases}$$

olduğu, dolayısıyla, (S'_n) dizisinin üstten sınırlı olduğu elde edilir. Demek ki, $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^{1+\varepsilon}$ serisi yakınsaktır. $\diamond$

Uyarı 8.6.1 *Problem (12) deki önermenin tersi genellikle doğru değildir. Örneğin,* $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *dizisi için* $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *yakınsak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serisi ise ıraksaktır.*

(13) Terimleri negatif olmayan (a_n) dizisi verilmiş olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) serisi yakınsak olduğunda aşağıdaki serilerinde yakınsak olacaklarını gösteriniz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1}\}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_n . a_{n+1} \cdots a_{2n-1}}$;

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$ ve $0 \leq \frac{a_n}{1+na_n} \leq a_n$ olduğuna göre, Teorem 8.2.4 gereğince (a) ve (b) serileri yakınsaktır.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\} \leq a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ olduğu açıktır. (A) serisi yakınsak olduğundan, bu serinin (S_n) kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlıdır, yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n \leq S$ olacak şekilde $S \geq 0$ sayısı vardır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}$ (A') serisinin n. kısmi toplamı S'_n olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^{n} \max\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\} \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1} + a_{k+2}) \\ &= S_n + S_{n+1} - a_1 + S_{n+2} - a_1 - a_2 \\ &\leq S_n + S_{n+1} + S_{n+2} \leq 3S \end{aligned}$$

olduğuna göre, (S'_n) dizisi üstten sınırlıdır. Demek ki, (A') serisi yakınsaktır (Teorem 8.2.2 den).

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\min\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1}\} \leq a_n$ olduğundan Teorem 8.2.4 gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1}\}$ serisi yakınsaktır.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n}$ $(\overline{A})$ serisinin n. kısmi toplamı $\overline{S_n}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \overline{S_n} &= a_1 + \frac{a_2 + a_3}{2} + \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} + \cdots + \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n} \\ &\leq a_1 + a_2 \frac{1}{2} + a_3 \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Big) + a_4 \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\Big) \\ &+ \cdots + a_p \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \cdots + \frac{1}{[\![\frac{p}{2}]\!] + 1}\Big) + \cdots + \\ &+ a_{2n-1} \Big(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) \\ &\leq \sum_{m=1}^{2n-1} a_m = S_{2n-1} \leq S \end{aligned}$$

yazılabilir. $(\overline{S_n})$ dizisi üstten sınırlı olduğuna göre, $(\overline{A})$ serisi yakınsaktır (Teorem 8.2.2 den).

(f) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt[n]{a_n . a_{n+1} \cdots a_{2n-1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}}{n}$$

ve (e) ye göre $(\overline{A})$ serisi yakınsak olduğundan, dolayı Teorem 8.2.4 gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_n . a_{n+1} \cdots a_{2n-1}}$ serisi yakınsaktır. $\diamond$

(14) Terimleri negatif olmayan (b_n) dizisi için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) serisi ıraksak olduğunda

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{b_n}{1+b_n} \quad (B')\ ; \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \max\{b_n, b_{n+1}, \cdots, b_{2n-1}\} \quad (\overline{B})$$

serilerinin de ıraksak olduklarını gösteriniz.

Çözüm: (a) $\frac{b_n}{1+b_n} = 1 - \frac{1}{1+b_n}$ olduğundan, (B') serisinin yakınsak olması için $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ olması gereklidir. Bu durumda, $n \to +\infty$ iken $\frac{b_n}{1+b_n} \sim b_n$ olduğuna göre, (B) nin ıraksak olması halinde (B') serisi de ıraksaktır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\max\{b_n, b_{n+1}, \cdots, b_{2n-1}\} \geq b_n$ olduğuna göre, Teorem 8.2.4 gereğince $(\overline{B})$ serisi ıraksaktır. $\diamond$

(15)

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \neq 2^k \text{ ise}, \\ \frac{1}{2^k}, & n = 2^k \text{ ise} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) serisinin yakınsak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{b_n, b_{n+1}, \cdots, b_{2n-1}\}$ $(\overline{B})$ serisinin de ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $k \in \mathbb{N}$, $2^k + 1 \leq n \leq 2^{k+1}$ ise

$$2^{k+1} + 1 \leq 2n - 1 \leq 2^{k+2} - 1$$

olduğuna göre, $\max\{b_n, b_{n+1}, \cdots, b_{2n-1}\} = \frac{1}{2^{k+1}}$ bulunur. Buna göre, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \max\{b_n, b_{n+1}, \cdots, b_{2n-1}\} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

olduğu elde edilir. Buradan da $(\overline{B})$ serisinin ıraksak olduğu anlaşılır (Cauchy kriterinden). $\diamond$

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri yakınsak ise

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

serilerininde yakınsak olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}({a_n}^2 + {b_n}^2)$, $(a_n + b_n)^2 \leq 2({a^2}_n + {b^2}_n)$ ve $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}({a^2}_n + \frac{1}{n^2})$ olduğu açıktır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ve Problem (12) ye göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a^2}_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {b^2}_n$ serileri yakınsak olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ({a^2}_n + {b^2}_n)$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ({a^2}_n + \frac{1}{n^2})$ serileride yakınsaktırlar (Teorem 8.1.11 dan). Buna göre, Teorem 8.2.4 gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ serileri yakınsaktırlar. $\diamond$

(17) (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) yakınsak ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) ıraksak,

(b) (A) ve (B) serileri ıraksak

oldukları durumlarda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ (C) serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: (a) durumunda (C) serisi ıraksaktır. Gerçekten, (C) serisi yakınsak olduğunda $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ eşitliğinden Teorem 8.1.11 gereğince (B) serisi yakınsak olacaktır.

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ için (A), (B) ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{n})$ serileri ıraksaktırlar. $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ için (A) ve (B) serileri ıraksak fakat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ serisi yakınsaktır. Demek ki, (b) durumunda (C) serisinin yakınsaklığı üzerine kesin bir şey söylenemez. $\diamond$

(18) Karşılaştırma testlerinden yararlanarak genel terimleri aşağıdaki şekilde verilen serilerin karakterini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{n+1}{n^2}$; (b) $a_n = \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$;

(c) $a_n = \frac{5+3.(-1)^{n-1}}{2^n}$; (d) $a_n = \frac{\cos(\frac{\pi}{4n})}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$;

(e) $a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$; (f) $a_n = \frac{n+2}{n^2(4+3\sin(\frac{\pi n}{3}))}$;

(g) $a_n = \frac{\arcsin \frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$; (h) $a_n = \frac{n^5(\sqrt{2}+\sin\sqrt{n})}{2^n+n}$.

Çözüm: (a) $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1$ ve $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.
(b) $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^6}}} = 2$$

ve $\sum \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.
(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2 \leq 5+3.(-1)^{n-1} \leq 8$ olduğuna göre, $0 < a_n = \frac{5+3.(-1)^{n-1}}{2^n} \leq \frac{8}{2^n}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ serisi yakınsak olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.
(d) $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cos(\frac{\pi}{4n})}{\sqrt[5]{2n^5-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{4n})}{\sqrt[5]{2-\frac{1}{n^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.
(e) $b_n = \frac{\ln n}{n^2}$, $n = 2, 3, \cdots$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\ln n + \sin n)}{(n^2+2\ln n)\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\sin n}{n^2 \ln n}}{1+2\frac{\ln n}{n^2}} = 1$$

ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ serisi yakınsak olduğuna göre, (Cauchy integral testinden) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.
(f) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq 4+3\sin(\frac{\pi n}{3}) \leq 7$ olduğuna göre, $\frac{1}{7}\frac{n+2}{n^2} \leq a_n \leq \frac{n+2}{n^2}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$ serisi ıraksak olduğuna göre, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.
(g) $b_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$, $n =\in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \arcsin \frac{n-1}{n+1} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ serisi ıraksak olduğuna göre, (Bkz. Örnek 8.2.23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

(h) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_n = \frac{n^5}{2^n} \frac{\sqrt{2}+\sin\sqrt{n}}{1+\frac{n}{2^n}} \leq (1+\sqrt{2})\frac{n^5}{2^n}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ serisi yakınsak olduğuna göre (D'alembert testinden) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır. $\diamond$

(19) $(n^p a_n)-$ Testi yardımıyla genel terimleri aşağıda verilen serilerin karakterini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$; (b) $a_n = 1 - \cos\frac{2\pi}{n}$;

(c) $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$; (d) $a_n = \frac{1}{n}\arctan\frac{1}{2\sqrt{n}}$;

(e) $a_n = (e^{\frac{1}{n}} - 1)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; (f) $a_n = \sin\frac{2n+1}{n^3+5n+3}$;

(g) $a_n = e^{\frac{(\sqrt[3]{n}+1)}{(n^2+3)}} - 1$; (h) $a_n = \frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+\ln^2 n}$;

(i) $a_n = \log_{2^n}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)$; (j) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

Çözüm: (a) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{3}{n})}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n a_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$ ıraksaktır.

(b) $t \to 0$ iken $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_n = 1 - \cos\frac{2\pi}{n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

yakınsaktır.

(c) $t \to 0$ iken $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right) &= \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{n^2\sqrt[3]{n^2}}\right) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{3}} a_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right) \end{aligned}$$

yakınsaktır.

(d) $t \to 0$ iken $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{2\sqrt{n}} &= \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{4n^2}\Big) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} a_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

yakınsaktır.

(e) $t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + +o(t)$ ve $\sin t = t + o(t)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_n &= (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \Big(\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\Big) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} a_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

yakınsaktır.

(f) $t \to 0$ iken $\sin t = t + o(t)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_n = \sin \frac{2n+1}{n^3+5n+3} &= \frac{2n+1}{n^3+5n+3} + o\Big(\sin \frac{2n+1}{n^3+5n+3}\Big) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^3+5n+3} \end{aligned}$$

yakınsaktır.

(g) $t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + +o(t)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_n &= e^{\frac{(\sqrt[3]{n}+1)}{(n^2+3)}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{n}+1}{n^2+3} + o\Big(\frac{\sqrt[3]{n}+1}{n^2+3}\Big) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{5}{3}} a_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \Big(e^{\frac{(\sqrt[3]{n}+1)}{(n^2+3)}} - 1\Big) \end{aligned}$$

yakınsaktır.

(h) $a_n = \frac{1}{n+\ln^2 n}\ln(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)) = \frac{1}{n+\ln^2 n}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+\ln^2 n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n+\ln^2 n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n(n+\ln^2 n)} + \frac{1}{n+\ln^2 n}.o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln^2 n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+\ln^2 n}.o\frac{1}{n} = 1\\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\sin(\frac{1}{n}))}{n+\ln^2 n}
\end{aligned}$$

yakınsaktır.

(i) $a_n = \log_{2^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right) = \frac{1}{n\ln 2}\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\ln 2}\left(\frac{\sqrt[n]{3}}{n} + o\left(\frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)\right) = \frac{1}{\ln 2}\frac{\sqrt[n]{3}}{n^2} + o\left(\frac{\sqrt[n]{3}}{n^2}\right)\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\log_{2^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)
\end{aligned}$$

yakınsaktır.

(j) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = 1\\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}
\end{aligned}$$

ıraksaktır. ◇

(20) D'alembert oran testinden yararlanarak aşağıda genel terimi verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{2n-1}{(2n)!!}$; (b) $a_n = \frac{3^n.n!}{n^n}$;
(c) $a_n = n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$; (d) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;
(e) $a_n = \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$; (f) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;
(g) $a_n = \frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{3^n.n!}$; (h) $a_n = \frac{2.5\cdots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$;
(i) $a_n = \frac{3.6\cdots(3n)}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$; (j) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$.

Çözüm: (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!(2n+1)}{(2n+2)!!(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(2n+2)(2n-1)} = 0 < 1$ olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3.n^n}{(n+1)^n}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$ olduğuna göre, bu seri ıraksaktır.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ [$t \to 0$ iken $\tan t \sim t$ olduğundan]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e} < 1$ olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2 3^{n^2}}{3^{(n+1)^2}(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{2n+1}}$ [L'Hospital kuralından]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2.3^{2n+1}\ln 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{4.3^{2n+1}\ln^2 3} = 0 < 1$$

olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2(2n)!}{(2n+2)!.(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n+2} = +\infty > 1$ olduğuna göre, bu seri ıraksaktır.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1.3.5\cdots(2n-1)(2n+1)3^n n!}{3^{n+1}(n+1)!1.3\cdots(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1$ olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2.5\cdots(3n+2)(3n+5)2^n(n+1)!}{2^{n+1}(n+2)!2.5\cdots(3n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2(n+2)} = \frac{3}{2} > 1$ olduğuna göre, bu seri ıraksaktır.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3.6\cdots(3n)(3n+3)}{3.6\cdots(3n)}\frac{\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}}{\arcsin\frac{1}{2^n}}\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$
[$t \to 0$ iken $\arcsin t \sim t$ olduğundan]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}(n+2)} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{3}{2} > 1$$

olduğuna göre, bu seri ıraksaktır.

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!(n!)^3 4^{3n}}{[(n+1)!]^3 4^{3n+3}(3n)!}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3 4^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 < 1$$

olduğuna göre, bu seri yakınsaktır. $\diamond$

(21) Cauchy kök testinden yararlanarak aşağıda genel terimi verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n},\ n \geq 2$; (b) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$;

(c) $a_n = 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; (d) $a_n = \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$;

(e) $a_n = \frac{n^4[\sqrt{5}+(-1)^n]^n}{4^n}$; (f) $a_n = \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$;

(g) $a_n = \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{\frac{n}{2}}},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Çözüm: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$ olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{-(\sqrt{n}+3)}\right]^{-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3}} = \frac{1}{e} < 1$$

olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = 3e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}} = \frac{3}{e} > 1$ olduğuna göre, bu seri ıraksaktır.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin\frac{1}{n} = \arcsin 0 = 0 < 1$ olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(e) $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{4}{n}}[\sqrt{5}+(-1)^n]}{4}$ olduğuna göre,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \lim_{k\to\infty} (2k)^{\frac{4}{2k}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \lim_{k\to\infty} (2k-1)^{\frac{4}{2k-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

olduğu elde edilir. Buna göre, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} < 1$ yazılabilir. Demek ki, bu seri yakınsaktır.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{n^{1+\frac{3}{n}}(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{n+3}{2n}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{n+3}{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

olduğuna göre, bu seri yakınsaktır.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\alpha}{n}}}{\sqrt{\ln(n+1)}} = 0 < 1$ olduğuna göre, bu seri her $\alpha \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. $\diamond$

(22) Raabe veya Gauss testlerinden yararlanarak aşağıda genel terimi verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = (2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\cdots(2-\sqrt[n]{a})$, $a > 0$;

(b) $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$;

(c) $a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$;

(d) $a_n = \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$;

(e) $a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \frac{1}{n^q}$;

(f) $a_n = \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)n^\alpha}, \beta > 0$.

Çözüm: (a) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2-\sqrt[n+1]{a}}$ ve $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{a} &= e^{\frac{\ln a}{n+1}} = 1 + \frac{\ln a}{n}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) + \frac{\ln^2 a}{2(n+1)^2} + o\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\\ &= 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\Theta_n}{n^2},\ |\Theta_n| < c\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{\ln a}{n}-\frac{\Theta_n}{n^2}} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\widetilde{\Theta_n}}{n^2},\ |\widetilde{\Theta_n}| < d$$

yazılabilir. Buradan $\ln a > 1$ (veya $a > e$) için bu seri yakınsak, $\ln a \le 1$ (veya $0 < a \le e$) için de ıraksaktır (Gauss Teoreminden).

(b) $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+p} \\
&= \frac{1}{e}e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1+(n+p)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{p-\frac{1}{2}}{n}+o(\frac{1}{n})} \\
&= 1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)
\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big) = p-\frac{1}{2}$$

elde edilir. Raabe Testi gereğince bu seri $p > \frac{3}{2}$ için yakınsak, $p < \frac{3}{2}$ için de ıraksaktır.

(c) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})} \frac{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1+\frac{2}{\sqrt{n+1}} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty > 1
\end{aligned}$$

olduğuna göre, Raabe Testi gereğince bu seri yakınsaktır.

(d) $p = -n,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ olduğunda verilen serinin yakınsak olduğu açıktır. $p \neq -n,\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ olsun. Bu durumda, $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{p+n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^q = \Big(1+\frac{p}{n}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{q+1} \\
&= \Big(1-\frac{p}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big(1+\frac{q+1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \\
&= 1+\frac{q-p+1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big) = q-p+1
\end{aligned}$$

olur. Buna göre, Raabe Testi gereğince verilen seri $q > p$ için yakınsak, $q < p$ için de ıraksaktır.

(e) $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^p\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^q\\ &= \Big(1+\frac{p}{2n+1}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big(1+\frac{q}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\ &= 1+\frac{p}{2n+1}+\frac{q}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)=1+\Big(\frac{p}{2}+q\Big)\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=\frac{p}{2}+q\end{aligned}$$

elde edilir. Raabe Testi gereğince verilen seri $\frac{p}{2}+q>1$ için yakınsak, $\frac{p}{2}+q<1$ için de ıraksaktır.

(f) $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)n^\alpha}\,\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)(\beta+n+1)(n+1)^\alpha}{(n+2)!}\\ &= \frac{\beta+n+1}{n+2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^\alpha=\Big(1+\frac{\beta-1}{n+2}\Big)\Big(1+\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\ &= \Big(1+\frac{\beta-1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big(1+\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\ &= 1+\frac{\alpha+\beta-1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=\alpha+\beta-1$$

olur. Raabe Testi gereğince buradan verilen serinin $\alpha+\beta>2$ için yakınsak, $\alpha+\beta<2$ için de ıraksak olduğu anlaşılır. $\diamond$

(23) **Logaritmik Test:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=L$ olsun. Bu seri $L\le 1$ ise ıraksak, $L>1$ ise yakınsaktır. Gösteriniz.

Çözüm: (a) $L\le 1$ olsun. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=L$ ise $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyleki, $\forall n\ge n_\varepsilon$ için

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\le 1\Rightarrow \ln\frac{1}{a_n}\le \ln n\Rightarrow \frac{1}{a_n}\le n\Rightarrow a_n\ge\frac{1}{n}$$

olur. Karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

(b) $L > 1$ olsun. $1 < \ell_0 < L$ olacak şekilde bir ℓ_0 sayısı seçelim. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > \ell_0$ ise $\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyleki, $\forall n \geq n'_\varepsilon$ için

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > \ell_0 \Rightarrow \ln \frac{1}{a_n} > \ln n^{\ell_0} \Rightarrow \frac{1}{a_n} > n^{\ell_0} \Rightarrow a_n < \frac{1}{n^{\ell_0}}$$

olur. $\ell_0 > 1$ için $\sum\limits_{n=n'_\varepsilon} \frac{1}{n^{\ell_0}}$ yakınsak olduğundan Karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=n'_\varepsilon} a_n$ yakınsaktır $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır. $\diamond$

(24) Logaritmik testinden yararlanarak aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

(a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$.

Çözüm: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\ln(\ln n)) = +\infty > 1$ olduğuna göre, verilen seri yakınsaktır.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0 < 1$ olduğuna göre, verilen seri ıraksaktır. $\diamond$

(25) Cauchy integral testinden faydalanarak aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$; (b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln(\ln n))^q}$.

Çözüm: (a) $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ fonksiyonu $[2, +\infty)$ aralığında pozitif ve $\forall x \in [2, +\infty)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, azalan olduğuna göre, Cauchy integral testinden yararlanabiliriz.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x \ln^p x}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \frac{\ln^{1-p} A - \ln^{1-p} 2}{1-p}, & p \neq 1 \text{ ise,} \\ \ln(\ln A) - \ln(\ln 2), & p = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\ln^{1-p} 2}{p-1}, & p > 1 \text{ ise}, \\ +\infty, & p \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. Demek ki, verilen seri $p > 1$ için yakınsak $p \leq 1$ için de ıraksaktır.

(b) (a) da olduğu gibi Cauchy integral testini kullanabiliriz.

$$I = \int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x (\ln(\ln x))^q}, \; [\ln x = t \text{ dersek}] = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t^p \ln^q t}}$$

integralini göz önüne alalım.

$p = 1$ olsun. Bu durumda, (a) dan I integrali $q > 1$ için yakınsak $q \leq 1$ için ıraksaktır. Demek ki, verilen seri $p = 1,\; q > 1$ için yakınsak, $p = 1,\; q \leq 1$ için ıraksaktır.

$p > 1$ olsun. $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln^\gamma t}{t^\varepsilon} = 0$ olduğuna göre, $p \geq \alpha > 1$ olmak üzere yeteri kadar büyük t ler için $\frac{1}{t^p \ln^q t} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ yazabiliriz.

$p < 1$ olsun. Benzer şekilde, $p \leq \alpha < 1$ olmak üzere yeteri kadar büyük t ler için $\frac{1}{t^p \ln^q t} \geq \frac{1}{t^\alpha}$ yazabiliriz. Has olmayan integraller için karşılaştırma testinden I integralinin $p < 1$ için yakınsak ve $p > 1$ için ıraksak olduğunu elde ederiz. Cauchy integral testi gereğince bu söylenenlerin verilen seri için de geçerli olduğu elde edilir. ⋄

(26) Teorem 8.2.22 i ispatlayınız.

Çözüm: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\; n \in \mathbb{N}$ ve $t_m = \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k},\; m \geq 0$ olsun. $n < 2^m$ için

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^m} + \cdots + a_{2^{m+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^m a_{2^m} = t_m \end{aligned}$$

olur. Öte yandan, $n > 2^m$ için

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{m-1}+1} + \cdots + a_{2^m}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{m-1} a_{2^m} = \frac{1}{2} t_m \end{aligned}$$

yazılabilir. $n < 2^m$ için $S_n \le t_m$ ve $n > 2^m$ için $S_n \ge \frac{1}{2}t_m$ olduğuna göre, (S_n) ve (t_m) dizileri aynı zamanda sınırlı veya aynı zamanda sınırsızdır. Dolayısıyla, bu dizilerin karakteri aynıdır, yani bu dizilerden biri yakınsak (ıraksak) ise diğeri de yakınsaktır (ıraksaktır). $\diamond$

(27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serisi ıraksak ve $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\forall \sigma > 0$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S^{1+\sigma}}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F(x) = \int \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = -\frac{1}{\sigma}\frac{1}{x^\sigma}$, $x > 0$ fonksiyonu için ortalama değer teoremi gereğince $\overline{S_n} \in (S_{n-1}, S_n)$ olmak üzere

$$F(S_n) - F(S_{n-1}) = F'(\overline{S_n})(S_n - S_{n-1})$$

veya

$$\frac{1}{\sigma}\Big(\frac{1}{S_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{S_n^\sigma}\Big) = \frac{a_n}{\overline{S_n^{1+\sigma}}}$$

yazabiliriz. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}} < \frac{a_n}{\overline{S_n^{1+\sigma}}} = \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{1}{S_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{S_n^\sigma}\Big)$$

olduğu elde edilir. $t_n = \sum\limits_{k=2}^{n+1}\Big(\frac{1}{S_{k-1}^\sigma} - \frac{1}{S_k^\sigma}\Big)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. (t_n) dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan, ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \frac{1}{S_1^\sigma} - \frac{1}{S_{n+1}^\sigma} < \frac{1}{S_1^\sigma} = \frac{1}{a_1^\sigma}$ dir) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{S_{k-1}^\sigma} - \frac{1}{S_k^\sigma}\Big)$ serisi yakınsaktır. O halde, karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S^{1+\sigma}}$ serisi yakınsaktır. $\diamond$

(28) $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve toplamını bulunuz.

Çözüm: $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$ olmak üzere serinin genel terimi $a_n = (-1)^n b_n$, $n = 0, 1, \cdots$ dir. (b_n) dizisi $n \ge [\![\frac{2-\ln 2}{2\ln 2}]\!] + 1$ için azalan ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğuna göre Leibnitz testinden verilen seri yakınsaktır.

$$t^{(1)}{}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\Big),$$

$$t^{(2)}{}_n = 2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}\Big) = \frac{4}{3}\Big(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\Big),$$

....

$$t^{(k+1)}{}_n = 2\Big(\frac{(-1)^k}{2^k}+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{(-1)^k}{2^k}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\Big),$$

....

$$t^{(n)}{}_n = \frac{4}{3}\Big(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\Big),\ t^{(n+1)}{}_n = 2\frac{(-1)^n}{2^n}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S_n &= 1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{2n+1}{2^n} \\ &= t^{(1)}{}_n + t^{(2)}{}_n + \cdots + t^{(n)}{}_n + t^{(n+1)}{}_n \\ &= \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\Big) \\ &- \frac{2}{3}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4}{3}\frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2\frac{(-1)^n}{2^n} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan, (S_n) dizisinin yakınsak ve $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{9}$ olduğu elde edilir. Demek ki, verilen seri yakınsak ve toplamı $\frac{2}{9}$ dur. ⋄

(29) Yakınsak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ serisinin terimlerinin yerini öyle değiştiriniz ki, elde edilen seri ıraksak olsun.

Çözüm: $\Big(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)+\Big(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\Big)+\cdots+$

$$+\Big(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big)+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

serisini göz önüne alalım. Bu serinin ıraksak olduğunu görelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$ olduğuna göre, $a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ yazılabilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ serisi ıraksak olduğundan, ($\frac{1}{\sqrt{6n-5}} > \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{n}}$ ve $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksaktır) karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi ıraksaktır. ⋄

(30) Aşağıda verilen serilerin karakterini inceleyiniz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$;
(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

Çözüm: (a) $\forall x > e^{100}$ için $(x^{-1}\ln^{100} x)' < 0$ ve

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\ln^{100} x = 100 \lim_{x\to\infty} x^{-1}\ln^{99} x = \cdots = (100!) \lim_{x\to\infty} x^{-1} = 0$$

olduğuna göre, $(n^{-1}\ln^{100} n)$ dizisi $(n \geq [\![e^{100}]\!]+1)$ azalan ve $\lim\limits_{n\to\infty} (n^{-1}\ln^{100} n) = 0$ dır. Öte yandan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\Big| = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1} \Big|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\Big| < \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$$

olduğundan, Dirichlet testinden verilen seri yakınsaktır.
(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ve $b_n = \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Leibnitz testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve Dirichlet testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak olduğundan, (Çünkü, $\left(\frac{1}{n}\right)$ monoton ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cos 2k\Big| < \frac{1+(\cos 1)^{-1}}{2}$ dir) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ serisi de yakısaktır.
(c) $\forall n = 2, 3, \cdots$ için

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

ve $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ serisi yakınsak (Leibnitz testinden) ve $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ serisi ıraksak olduğuna göre, verilen seri de ıraksaktır.
(d) $b_n = \frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - n\pi) = (-1)^n b_n$ olduğu açıktır. (b_n) dizisi monoton ($\forall n > n_0$ için) azalan ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğuna göre Leibnitz testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır. $\diamond$

(31) Aşağıda verilen serilerin koşullu yakınsak ya da mutlak yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\Big), p \geq 0;$ (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$; (d) $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$;

(e) $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\cdots$.

Çözüm: (a) $p=0$ için verilen serinin ıraksak olduğu açıktır. $p>0$ olsun. Maclaurin formülü (Peano kalan terimli) gereğince $n \to +\infty$ iken

$$\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\Big) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\Big(\frac{1}{n^{2p}}\Big)$$

yazabiliriz. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$ ve $b_n = \frac{1}{2n^{2p}} + o\Big(\frac{1}{n^{2p}}\Big)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Leibnitz testinden $p>0$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve karşılaştırma testinden $p > \frac{1}{2}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak olduğundan, verilen seri $p > \frac{1}{2}$ için yakınsaktır.

$p>0$ için

$$\frac{1}{2n^p} < \Big|\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\Big)\Big| < \frac{2}{n^p}$$

eşitsizliğinden karşılaştırma testi gereğince verilen seri $p>1$ için mutlak yakınsaktır. Demek ki, verilen seri $\frac{1}{2} < p \leq 1$ için koşullu ve $p>1$ için mutlak yakınsaktır.

(b) $p \leq 0$ için verilen seri ıraksaktır (Çünkü, genel teriminin limiti yoktur). $p>0$ olsun. Peano kalan terimli Maclaurin formülüne göre $n \to +\infty$ iken

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} &= (-1)^n n^{-p}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^{-p} \\ &= (-1)^n n^{-p}\Big(1-p\frac{(-1)^{n+1}}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\Big(\frac{1}{n^{p+1}}\Big) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ve $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{p}{n^{p+1}}+o\Big(\frac{1}{n^{p+1}}\Big)\Big)$ serileri $p>0$ için yakınsaktırlar (birinci seri Leibnitz testinden, ikinci seri ise karşılaştırma testinden). O halde, verilen seri $p > 0$ için yakınsaktır.

$\forall n = 2, 3, \cdots$ için

$$\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} < \frac{1}{(n-1)^p}$$

olduğu ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi $p > 1$ için yakınsak olduğuna göre, karşılaştırma testinden verilen seri $p > 1$ için mutlak yakınsaktır.

Demek ki, verilen seri $0 < p \leq 1$ için koşullu ve $p > 1$ için mutlak yakınsaktır.
(c) $p \leq 0$ için verilen seri ıraksaktır (Çünkü, genel teriminin limiti sıfır değildir). $p > 0$ olsun. (b) ye benzer olarak

$$\begin{aligned}
\sin\frac{n\pi}{4}(n^p + \sin\frac{n\pi}{4})^{-1} &= n^{-p}\sin\frac{n\pi}{4}\Big(1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\Big)^{-p} \\
&= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\Big(1 - p\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\Big(\frac{1}{n^p}\Big)\Big) \\
&= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - p\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\Big(\frac{1}{n^{2p}}\Big)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$\left(\frac{1}{n^p}\right)$ azalan, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ ve $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{4}\right)$ dizisi sınırlı olduğundan, Dirichlet testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ serisi yakınsaktır. Karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\Big(\frac{1}{n^{2p}}\Big)\right)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$$

serilerinin karakteri aynıdır. $p > 0$ olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ serisi yakınsaktır (Dirichlet testi gereğince). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ serisi $p > \frac{1}{2}$ için yakınsak olduğundan,

($p \leq \frac{1}{2}$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ ıraksak olduğuna göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ serisi de ıraksaktır) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p}$ serisi $p > \frac{1}{2}$ için yakınsaktır. Demek ki, verilen seri $p > \frac{1}{2}$ için yakınsaktır.

Verilen seriyi mutlak yakınsak yapan p değerlerini bulalım.

$$\frac{\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{2n^p} < \frac{\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} . \frac{1}{\left|1 + n^{-p} \sin \frac{n\pi}{4}\right|} \leq \frac{2\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$$

ve

$$\frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p} = \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} \leq n^{-p}\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right| \leq n^{-p}$$

eşitsizliklerinden ve karşılaştırma testinden şu sonuca varırız.

Verilen seri, $p > 1$ için mutlak yakınsak, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ için de koşullu yakınsaktır.

(d) $p \leq 0$ veya $q \leq 0$ için verilen seri ıraksaktır (gereklilik testine göre). İleride $p > 0$ ve $q > 0$ olacağını varsayalım. Verilen seriyi, terimlerinin sırasını bozmadan

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q}\right) + \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q}\right) + \cdots \\ = & \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right) \end{aligned} \tag{8.16}$$

biçiminde yazalım. $n \to +\infty$ iken

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q} &= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-q} \\ &= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\left(1 - \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} + \frac{q}{n^{q+1}} + o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right) \end{aligned}$$

olduğuna göre, (8.16) serisi $p = q > 0$ için yakınsaktır. $p \neq q$ olduğunda (8.16) serisi $p > 1$ ve $q > 1$ için yakınsaktır. Buna göre, Teorem 8.4.3 gereğince verilen seri bu durumlarda yakınsaktır.

Verilen serinin yalnızca $p > 1$ ve $q > 1$ için mutlak yakınsak olduğu görülür.

(e) Verilen seriyi, terimlerinin sırasını bozmadan

$$\sum_{n=1,4,7,\cdots}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p}\Big) \tag{8.17}$$

biçiminde yazalım. $p > 0$ ve $q > 0$ olduğunu varsayarak $n \to +\infty$ iken

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} \\ &= 2\Big(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\Big) + 2\Big(\frac{q}{n^{q+1}} - \frac{p}{n^{p+1}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^{q+1}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^{p+1}}\Big) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan, karşılaştırma testine göre (8.17) serisi $p = q > 0$ için yakınsaktır. $p \neq q$ olsun. O halde, $n \to +\infty$ iken $a_n \sim \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$ olduğuna göre, karşılaştırma testinden (8.17) serisi $\min(p,q) \leq 1$ için ıraksaktır. Teorem 8.4.3 ün bütün koşulları sağlandığından (8.17) ve verilen serinin karakteri aynı olduğundan, (8.17) serisi için söylenenler verilen seri için de geçerlidir.

$p \leq 0$ veya $q \geq 0$ için verilen seri ıraksaktır (gereklilik testinden). Bu seri $p > 1$ ve $q > 1$ için mutlak, $0 < p = q \leq 1$ için de koşullu yakınsaktır. $\diamond$

(32) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^p}$ serisini mutlak veya koşullu yakınsak yapan α ve p değerlerini bulunuz.

Çözüm: $(\cos\sqrt{n}\alpha)$ dizisi sonsuz küçük bir dizi olmadığından verilen seri $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall p \leq 0$ için ıraksaktır (gereklilik testinden). $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için $\frac{|\cos\sqrt{n}\alpha|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p}$ olduğuna göre verilen seri her $p > 1$ için mutlak yakınsaktır (karşılaştırma testinden). $\alpha = 0$ ise verilen seri $0 < p \leq 1$ için ıraksaktır. Şimdi $\alpha \neq 0$ ve $0 < p \leq 1$ olsun. $F(x) = \int\limits_1^x \frac{\cos\sqrt{t}\alpha}{t^p} dt$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Lagrange kalan terimli Taylor formülü gereğince

$$F(n+1) - F(n) = F'(n) + \frac{1}{2}F''(n+\Theta_n) =$$

$[F'(n) = \frac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^p}$ olduğundan$]$

$$= \frac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^p} + \frac{1}{2}F''(n+\Theta_n), \quad 0 < \Theta_n < 1 \tag{8.18}$$

yazılabilir. (8.18) den görüldüğü gibi, eğer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F''(n+\Theta_n)$ serisi yakınsak ise verilen serinin yakınsak olması integral testi gereğince sonlu $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$ limitinin varlığına denktir.

$$\begin{aligned} F''(x) &= (F'(x))' = \Big(\frac{\cos\sqrt{x}\alpha}{x^p}\Big)' \\ &= -\frac{\alpha\sin\sqrt{x}\alpha}{2x^{p+\frac{1}{2}}} - \frac{p\cos\sqrt{x}\alpha}{x^{p+1}} \end{aligned}$$

eşitliğinden, K yalnızca p ve α ya bağlı bir sabit sayı olmak üzere $\forall x \in [1,+\infty)$ için $|F''(x)| \leq \frac{K}{x^{p+\frac{1}{2}}}$ olduğu elde edilir. Buna göre, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F''(n+\Theta_n)$ serisi $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için mutlak yakınsaktır (karşılaştırma testinden). Cauchy yakınsaklık kriterinden faydalanarak $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ limitinin var olduğunu gösterelim. $\xi > 0$ olmak üzere kısmi integrasyon formülüne göre

$$\begin{aligned} F(x+\xi) - F(x) &= \int\limits_{x}^{x+\xi} \frac{\cos\sqrt{t}\alpha}{t^p}dt \\ &= \frac{2\sin\sqrt{t}\alpha}{\alpha t^{p-\frac{1}{2}}}\Big|_{x}^{x+\xi} + \frac{2}{\alpha}(p-\frac{1}{2})\int\limits_{x}^{x+\xi}\frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{p+\frac{1}{2}}}dt \\ &= \frac{2\sin\sqrt{x+\xi}\alpha}{\alpha(x+\xi)^{p-\frac{1}{2}}} - \frac{2\sin\sqrt{x}\alpha}{\alpha x^{p-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\alpha}(p-\frac{1}{2})\int\limits_{x}^{x+\xi}\frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{p+\frac{1}{2}}}dt \end{aligned}$$

ve buradan da $\forall x \in [1,+\infty)$ ve $\forall \xi > 0$ için

$$\begin{aligned} |F(x+\xi) - F(x)| &= \frac{2}{\alpha(x+\xi)^{p-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\alpha x^{p-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\alpha}(p-\frac{1}{2})\int\limits_{x}^{x+\xi}\frac{dt}{t^{p+\frac{1}{2}}} \\ &< \frac{8}{\alpha x^{p-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}} = 0$ olduğuna göre son eşitsizlikten Cauchy kriteri gereğince sonlu $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ limitinin mevcut olduğu anlaşılır. Demek ki, verilen seri $\alpha \neq 0$ ve $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için yakınsaktır.

Şimdi, $\alpha \neq 0$ ve $p \in (0, \frac{1}{2}]$ olsun. Bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F''(n+\Theta_n)$ serisinin yakınsaklığı hakkında birşey söylenemez. $F(x)$ fonksiyonunun 2. dereceden Peano kalan terimli Taylor formülünü yazalım.

$$\begin{aligned} F(n+1) - F(n) &= F'(n) + \frac{1}{2!}F''(n) + \frac{1}{3!}F'''(n+\eta_n) \\ &= \frac{\cos\sqrt{n}\alpha}{n^p} - \frac{\alpha\sin\sqrt{n}\alpha}{4n^{p+\frac{1}{2}}} - \frac{p\cos\sqrt{n}\alpha}{2n^{p+1}} \\ &+ \frac{1}{6}F'''(n+\eta_n), 0 < \eta_n < 1 \end{aligned}$$

$$F'''(x) = -\frac{\alpha^2\cos\sqrt{x}\alpha}{4x^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha(p+\frac{1}{2})}{2x^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha p\sin\sqrt{x}\alpha}{2x^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{p(p+1)\cos\sqrt{x}\alpha}{x^{p+2}}$$

eşitliğinden L yalnızca α ve p ye bağlı bir sabit sayı olmak üzere $|F'''(x)| \leq \frac{L}{x^{p+1}}$, $x \in [1, +\infty)$ olduğu elde edilir.$p \in (0, \frac{1}{2}]$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ serisi yakınsak olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F'''(n+\eta_n)$ serisi mutlak yakınsaktır. $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^p}dt$ fonksiyonunu göz önüne alıp yukarıda olduğu gibi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\sin\sqrt{n}\alpha}{4n^{p+\frac{1}{2}}}$ serisinin yakınsak olduğu gösterilebilir. Demek ki, verilen serinin $\alpha \neq 0$ ve $0 < p < \frac{1}{2}$ için yakınsak olması sonlu $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$ limitinin varlığına denktir. Kısmi integrasyon formülü ile

$$F(n) = \frac{2}{\alpha}n^{\frac{1}{2}-p}\sin\sqrt{n}\alpha - \frac{2}{\alpha}\sin\alpha + \frac{(p-\frac{1}{2})}{2\alpha}\int\limits_1^n \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{p+\frac{1}{2}}}dt$$

eşitliğinin doğruluğu elde edilir. $0 < p \leq \frac{1}{2}$ için $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^x \frac{\sin\sqrt{t}\alpha}{t^{p+\frac{1}{2}}}dt$ limitinin varlığı $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ için $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ limitinin varlığına benzer şekilde gösterilir. $\alpha \neq 0$ olduğundan, $(\sin\sqrt{n}\alpha)$ dizisinin $n \to +\infty$ iken limiti yoktur. Buna göre, sonlu $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ limiti de mevcut değildir. Demek ki, $\alpha \neq 0$ ve $q \in (0, \frac{1}{2}]$ için verilen seri ıraksaktır.

Verilen serinin $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için mutlak yakınsaklığını inceleyelim.

$$\frac{|\cos\sqrt{n}\alpha|}{n^p} \geq \frac{\cos^2\sqrt{n}\alpha}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2\sqrt{n}\alpha}{n^p}$$

eşitsizliğinden ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$, $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ serisi ıraksak olduğundan, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\sqrt{n}\alpha}{n^p}$, $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ serisinin ıraksak ve dolayısıyla $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos\sqrt{n}\alpha|}{n^p}$ serisinin ıraksak olduğu görülür.

Böylece, verilen seri $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ için mutlak, $\alpha \neq 0$ ve $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ için koşullu yakınsaktır. α ve p nin bütün diğer değerleri için verilen seri ıraksaktır. $\diamond$

(33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, $(p > 0)$ serisinin S toplamı için $\frac{1}{2} < S < 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Leibnitz testinden verilen seri yakınsak olduğundan, bu serinin (S_n) kısmi toplamlar dizisinin ve onun herhangi S_{n_k} alt dizisinin de limiti S dir. (S_n) dizisinin, terimleri

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right)$$

şeklinde tanımlanan (S_{2n}) dizisi artan ve terimleri

$$S_{2n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right)$$

şeklinde tanımlanan (S_{2n-1}) dizisi azalandır. Demek ki, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_{2n} < S < S_{2n-1}$ yazılabilir. Buradan $S < S_1 = 1$ olduğu anlaşılır. $S > \frac{1}{2}$ olduğunu gösterelim. (S_n) dizisinin (S_{4n-1}) alt dizisini göz önüne alalım. $f(x) = \frac{1}{x^p}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında içbükey olduğundan,

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} > \frac{2}{4^p}, \frac{1}{7^p} + \frac{1}{9^p} > \frac{2}{8^p}, \cdots, \frac{1}{(4n-1)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \frac{2}{(4n)^p}, \cdots$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned} S_{4n-1} &= 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(4n)^p}+\frac{1}{(4n+1)^p} \\ &> 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}-\cdots-\frac{1}{(4n-2)^p}+\frac{1}{(4n)^p} \\ &= 1-\frac{1}{2^p}S_{2n} \end{aligned}$$

olduğu bu eşitlikte $n\to\infty$ iken limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n-1} = S \geq 1-\frac{1}{2^p}\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1-\frac{S}{2^p} \Rightarrow S \geq 1-\frac{2^p}{2^p+1} > \frac{1}{2}$$

olur. ⋄

(34) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ serilerinin Cauchy çarpımının toplamını bulunuz.

Çözüm: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsak ve toplamı 1 (Bkz. Örnek 8.1.5 (c)), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ serisi yakınsak ve toplamı 2 (Bkz. Örnek 8.1.4(d)) olduğunu biliyoruz. Bu seriler pozitif terimli olduklarından ayrıca mutlak yakınsaktırlar. O zaman, Teorem 8.4.3 gereğince bu serilerin Cauchy çarpımı da yakınsaktır ve toplamı da 2 dir. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{k(k+1)2^{n-k}}\Big) = 2$$

eşitliği doğrudur. ⋄

(35) Koşullu yakınsak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ serisi için $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\Big).\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\Big)$ Cauchy çarpım serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ dersek

$$\begin{aligned}
c_n &= a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_2 b_{n-1} + a_1 b_n \\
&= (-1)^{n-1} \Big[\frac{1}{1.n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{k(n-k+1)} + \cdots + \frac{1}{n.1} \Big] \\
&= (-1)^{n-1} \Big[\frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\Big) + \cdots + \frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \Big] \\
&= (-1)^n \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= (-1)^n \frac{2}{n+1} (\ln n + c + o(1))
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = 0$ olduğu görülür. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|c_n| > \frac{2}{n+1}$ ve $|c_{n+1}| = |c_n| + \frac{1}{n+2}\Big(\frac{2}{n+2} - |c_n|\Big)$ olduğuna göre $(|c_n|)$ dizisi monotondur. Demek ki, Leibnitz testi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ serisi, yani $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisinin kendi kendine Cauchy çarpımı yakınsaktır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisinin toplamının $\ln 2$ olduğunu biliyoruz. Fakat Mertens teoremi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \ln^2 2$ olduğunu söyleyemeyiz. $c_n = (-1)^n \frac{2}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \ln^2 2$ olduğu Teorem 8.4.9 dan görülmektedir. $\diamond$

(36) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların yakınsak olduğunu gösteriniz ve değerlerini bulunuz.

(a) $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \Big(1 - \frac{6}{n(n+1)}\Big)$; (b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$;

(c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big)$; (d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\Big)$.

Çözüm: (a) $\forall n \geq 3$ için

$$1 - \frac{6}{n(n+1)} = \frac{(n-2)(n+3)}{n(n+1)}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=3}^{n}\Big(1-\frac{6}{k(k+1)}\Big)=\prod_{k=3}^{n}\frac{(k-2)(k+3)}{k(k+1)} \\ &= \frac{1.6}{3.4}.\frac{2.7}{4.5}\cdots\frac{(n-3).(n+2)}{(n-1).n} \\ &= \frac{1.2\cdots(n-3)}{3.4\cdots(n-1)}.\frac{6.7\cdots(n+2)}{4.5\cdots n} \\ &= \frac{1.2.(n+1)(n+2)}{(n-2)(n-1).4.5}=\frac{1}{10}\frac{(n+1)(n+2)}{(n-2)(n-1)} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Demek ki, verilen sonsuz çarpım yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{10}$ dur.
(b) $\sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x \le \sin^{2n-1}x$ eşitsizliğinin $[0,\frac{\pi}{2}]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x dx$$

olduğu elde edilir. (6.38) den

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x dx=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$ olduğuna göre, son eşitsizlikten

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$x_n=\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2<\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2n}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2=y_n$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 \le \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{\pi}{2} \in [x_n, y_n]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ olduğuna göre, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$ olduğu anlaşılır.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2n+1}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 = \frac{2.2.4.4\cdots 2n.2n}{1.3.3.5.5\cdots(2n-1)(2n+1)} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$ çarpımı yakınsak ve değeri $\frac{\pi}{2}$ dir.

(c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$ çarpımının yakınsak ve değerinin de $\frac{2}{\pi}$ olduğunu gösterelim. $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x^{(1)}{}_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{4k^2}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{1}{x_n}$$

olduğu açıktır. (b) den $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(1)}{}_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{2}{\pi}$, dolayısıyla, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi}$ olduğu anlaşılır.

(d) $y^{(1)}{}_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\Big) = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{4.2.6.4\cdots(2n+2).2n}{3.3.5.5\cdots(2n+1)(2n+1)} = \frac{2[4.4.6.6\cdots(2n-2).2n.2n](2n+2)}{[3.5\cdots(2n+1)]^2} \\ &= \frac{2n+2}{2(2n+1)}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{(2n+2)2n}{2(2n+1)^2}.y_n \end{aligned}$$

yazılabilir, burada $y_n = \frac{1}{2n}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2$ dir.

(b) den $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$ olduğuna göre,

$$\lim_{n\to\infty} {y^{(1)}}_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

dolayısıyla,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

olduğu anlaşılır. $\diamond$

(37) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$; (b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$; (c) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + e^{a.n})$;
(d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4n+8}{n^3+1}$; (e) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Çözüm: (a) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, fakat $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{1+1}{1} . \frac{2+1}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n + 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$ Demek ki, verilen çarpım ıraksaktır.

(b) $p > 0$ olsun. $n \to \infty$ iken $\ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \sim \frac{1}{n^p}$ olduğuna göre, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ serisi $p > 1$ için yakınsak, $0 < p \leq 1$ için de ıraksaktır.

$p \leq 0$ olsun. Bu durumda $a_n = 1 + \frac{1}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin limiti 1 olmadığından (gereklilik koşuluna göre) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ çarpımı $p \leq 0$ için ıraksaktır.

Demek ki, verilen sonsuz çarpım $p > 1$ için yakınsak $p \leq 1$ için ıraksaktır.

(c) $a \geq 0$ olsun. $a_n = 1 + e^{a.n}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin limiti 1 olmadığından verilen çarpım $a \geq 0$ için ıraksaktır.

$a < 0$ olsun. Bu durumda, $n \to \infty$ iken $\ln(1 + e^{a.n}) \sim e^{-|a|n}$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-|a|n}$ yakınsak olduğundan, (Cauchy integral testinden) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln(1 + e^{an})$ serisi ve dolayısıyla, verilen sonsuz çarpım $a < 0$ için yakınsaktır.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n^3+4n+8}{n^3+1} = 1+\frac{4n+7}{n^3+1}$ ve $n \to \infty$ iken $\frac{4n+7}{n^3+1} \sim \frac{4}{n^2}$ olduğuna göre, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{n^3+1}$ serisi yakınsaktır (karşılaştırma testinden). Demek ki, verilen sonsuz çarpım yakınsaktır(§8.5, 5^0).

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 < 0$ ve $n \to \infty$ iken $1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$ olduğuna göre $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)$ serisi ıraksaktır. O halde, (§8.5, 5^0) verilen sonsuz çarpım ıraksaktır. $\diamond$

(38) $a_n = 1 + \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^2{}_n$ serileri yakınsak ise $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz çarpımı yakınsaktır. Eğer, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^2{}_n$ serilerinden biri yakınsak diğeri ıraksak ise $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz çarpımı ıraksaktır. Gösteriniz.

Çözüm: Taylor formülü gereğince $x \to 0$ iken $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ olduğuna göre,

$$\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{1}{2}{\alpha_n}^2 + o({\alpha_n}^2) \tag{8.19}$$

yazılabilir. Buna göre,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^2{}_n$ yakınsaktır $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}[\alpha_n - \ln(1+\alpha_n)]$ yakınsaktır ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ yakınsak olduğundan,) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$ yakınsaktır $\Rightarrow \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^2{}_n$ serilerinden biri yakınsak, diğeri ıraksak olduğu durumda (8.19) den $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$ serisinin ıraksak, dolayısıyla da $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ çarpımının ıraksak olduğu elde edilir. $\diamond$

(39) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\sin n}{n}\right)$; (b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$; (c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{[[\log_2 n]]}}{n}\right)$.

Çözüm: (a) $a_n = \frac{n+\sin n}{n} = 1 + \frac{\sin n}{n}$, $\alpha_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{ve} \quad \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} {\alpha^2}_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mathrm{n}}{\mathrm{n}^2}$$

serilerini göz önüne alalım. Birinci seri Dirichlet testinden, ikinci seri ise Karşılaştırma testinden yakınsak olduğundan, Bir önceki problemden $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+\sin n}{n}\right)$ çarpımı yakınsaktır.

(b) $\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ dersek $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 + \alpha_n$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ yakınsak (Leibnitz testinden) ve $\sum_{n=1}^{\infty} {\alpha^2}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan, bir önceki problemden verilen çarpım ıraksaktır.

(c) $\alpha_n = \frac{(-1)^{[[\log_2 n]]}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ dersek $a_n = 1 + \alpha_n$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[[\log_2 n]]}}{n}$ serisinin ıraksak olduğunu gösterelim.

$m \in \mathbb{N}$, $2^m \leq n < 2^{m+1}$ için

$$\Big| \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{(-1)^{[[\log_2 k]]}}{k} \Big| = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k} > \frac{2^m}{2^{m+1}} > \frac{1}{2}$$

olduğundan, Cauchy kriteri gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ serisi ıraksaktır. Öte yandan, $\sum_{n=1}^{\infty} {\alpha_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan, bir önceki problemden verilen çarpım ıraksaktır. ◇

(40) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların koşullu yakınsak ya da mutlak yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right)$; (b) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}\right)$; (c) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha \ln(n+1)}\right)$.

Çözüm: (a) $\alpha > 1$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ serisi mutlak yakınsak olduğundan, verilen sonsuz çarpım $\alpha > 1$ için mutlak yakınsaktır (Teorem 8.5.5 den). $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ serileri yakınsak olduğundan, verilen sonsuz çarpım $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için koşullu yakınsaktır (§8.5, 6^0 dan). $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ yakınsak ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ ıraksak olduğundan, verilen sonsuz çarpım ıraksaktır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)} > 0$ olduğuna göre, verilen sonsuz çarpım yalnızca mutlak yakınsak olabilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}$ serisini göz önüne alalım. Cauchy integral testi gereğince bu seri $\alpha > 1$ için mutlak yakınsak, $0 < \alpha \leq 1$ için ıraksak olduğundan, verilen sonsuz çarpım $\alpha > 1$ için mutlak yakınsak, $0 < \alpha \leq 1$ için ıraksaktır.

(c)
$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha \ln(n+1)} \right| = \frac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}$$
olduğuna göre, $\alpha > 1$ için verilen sonsuz çarpımla (b) deki sonsuz çarpımın karakteri aynıdır, yani $\alpha > 1$ için verilen sonsuz çarpım mutlak yakınsaktır. Leibnitz testi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha \ln(n+1)}$ serisi $\forall\alpha > 0$ için yakınsak, Cauchy integral testi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha} \ln(n+1)}$ serisi $\alpha \geq \frac{1}{2}$ için yakınsak ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için ıraksak olduğuna göre, verilen sonsuz çarpım $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ için koşullu yakınsak ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için ıraksaktır. ◇

8.7 Ek Problemler

(41) Aşağıda verilen serilerin, kısmi toplamlar dizisinin limitine göre karakterlerini inceleyiniz ve yakınsaklık durumunda toplamını bulunuz.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1,1)^n$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln^{2n} 2$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$; (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$; (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n})$;

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$; (j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3+1}{n^3-1}$;

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 q^n, \ (|q| < 1)$; (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arccot(n^2+n+1)$;

(m) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$; (n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n \cos \frac{x}{2^n}}\right)^2$;

(o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((n+3)\sin\frac{\pi}{2(n+3)} - (n+2)\sin\frac{\pi}{2(n+2)}\right)^n$; (p) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$;

(q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x^{3n}+1}{x^{2n}+1}$.

Cevap:

(a) Yakınsak ve toplamı $\frac{3}{2}$ dir ; (b) Yakınsak ve toplamı $\frac{2}{3}$ dir ;
(c) Iraksaktır ; (d) Yakınsak ve toplamı $\frac{1}{1-\ln^2 2}$ dir ;
(e) Yakınsak ve toplamı $\frac{137}{300}$ dür ; (f) Yakınsak ve toplamı 1 dir ;
(g) Yakınsak ve toplamı 1 dir ; (h) Yakınsak ve toplamı $1-\sqrt[3]{2}$ dir ;
(i) Yakınsak ve toplamı $\ln 3$ tür ; (j) Yakınsak ve toplamı $\ln\frac{3}{2}$ dir ;

[(j) için Yol gösterme: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{k^3+1}{k^3-1} = -\ln \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ olduğunu gösteriniz.]

(k) Yakınsak ve toplamı $\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$ tür ; (l) Yakınsak ve toplamı $\frac{\pi}{4}$ tür ;
(m) Yakınsak ve toplamı 1 dir ;

[(m) için Yol gösterme: $S_n = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$ olduğunu gösteriniz.]

(n) Yakınsak ve toplamı $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ dir[(n) için Yol gösterme: $S_n = \frac{1}{\sin^2 x} - \left(\frac{1}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}\right)^2$ olduğunu gösteriniz.]

(o) Yakınsak ve toplamı $-\frac{3}{2}$ dir ; (p) Yakınsak ve toplamı $\frac{x}{1-x}$ tir ;
[(p) için Yol gösterme: $S_n = \frac{x}{1-x} - \frac{2^n x^{2^n}}{1-n^{2^n}}$ olduğunu gösteriniz.] (q) Iraksaktır .

(42) Aşağıda verilen serilerin, gereklilik testi gereğince ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+3}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2+2n+3}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^3+3}\right)^{n^2}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{0,3}}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\ln n! - 2\ln(2!.3!\cdots n!)}{n^2+n}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2$.

(43) Karşılaştırma testinden yararlanarak aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $(a > 0)$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^p}$, $(a, p > 0, b \geq 0)$; (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^4+3n^3}{n^4+1}$; (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$; (j) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$;

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{3n+1}{3n-1}$; (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n\pi}{n^2\sqrt{n}+n+1}$;

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n+1}{\sqrt[3]{an^7+3n^3+1}}$.

Cevap:

(a) Yakınsak ; (b) Iraksak ;

(c) Yakınsak ; (d) $a > 1$ için yakınsak, $0 < a \leq 1$ için ıraksak ;

(e) $b > 0$ ve $p > 1$ için yakınsak, $b > 0, 0 < p \leq 1$ ve $b = 0, p > 0$ için ıraksak ;

(f) Iraksak ; (g) Iraksak ;

(h) Iraksak ; (i) Iraksak ;

[(i) için Yol gösterme: $\forall n \geq 2$ için $\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$ olduğunu gösteriniz.]

(j) Yakınsak ; [Yol gösterme: $\frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$, $n \geq 4$ olduğunu gösteriniz.]

(k) $p > 0$ için yakınsak, $p \leq 0$ için ıraksak ; (l) Yakınsak ;
(m) $a = 0$ için yakınsak, $a \neq 0$ için ıraksak .

(44) D'alambert oran testinden yararlanarak genel terimleri aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{n!}$; (b) $a_n = \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$;
(c) $a_n = \frac{4.7.13\cdots(3n+4)}{3.7.11\cdots(4n+3)}$; (d) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{n2^{n+1}}$;
(e) $a_n = \frac{3.6\cdots(3n)}{(n+1)!}\arctan\frac{1}{2^n}$; (f) $a_n = \frac{4.7\cdots(3n+1)}{(2n)^n}$;
(g) $a_n = \frac{n^n \sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$; (h) $a_n = \frac{n^n}{n!3^n}$.

Cevap: (a) Iraksak ; (b) Yakınsak ; (c) Yakınsak ; (d) Yakınsak ; (e) Iraksak ; (f) Yakınsak ; (g) Iraksak ; (h) Yakınsak .

(45) Cauchy kök testinden yararlanarak genel terimleri aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = 2^{(-1)^n+n}$; (b) $a_n = 2^{(-1)^n-n}$;
(c) $a_n = \frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2 4^n}$; (d) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;
(e) $a_n = \frac{(5+(-1)^n)^n}{n^2 7^n}$; (f) $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$;
(g) $a_n = 3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; (h) $a_n = \arctan^n\left(\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)$;
(i) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^3+3n+1}}$; (j) $a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$.

Cevap: (a) Iraksak ; (b) Yakınsak ; (c) Iraksak ; (d) Yakınsak ; (e) Yakınsak ; (f) Yakınsak ; (g) Iraksak ; (h) Iraksak ; (i) Cauchy kök testinden kesin birşey söylenemez ; (j) Yakınsak .

(46) Raabe veya Gauss testlerinden yararlanarak genel terimleri aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$; (b) $a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

(c) $a_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^p \frac{1}{n^7}$; (d) $a_n = \frac{1.4\cdots(3n-2).2.5\cdots(3n+2)}{n!(n+1)!9^n}$;

(e) $a_n = \frac{\ln 2 \ln 3 \cdots \ln(n+1)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\cdots\ln(n+1+a)}$, $(a > 0)$;

(f) $a_n = \frac{2^n(n!)^2}{4.11\cdots(2n^2+n+1)}$; (g) $a_n = \frac{2.5.7\cdots(3n-4)}{3^n n!}$;

(h) $a_n = \frac{(2n-1)!! \sin\frac{\pi}{2^n}}{n^{n+p}}$, $(p > 0)$; (i) $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi}{\sqrt{k+4}}$.

Cevap: (a) Yakınsak ; (b) $p > 2$için yakınsak,$p \leq 2$ için ıraksak; (c) $p < 12$için yakınsak,$p \geq 12$için ıraksak; (d) Iraksak ; (e) Iraksak ; (f) Iraksak ; (g) Yakınsak ; (i) Yakınsak ; (h) $p > \frac{1}{2}$için yakınsak, $0 < p \leq \frac{1}{2}$için ıraksak.

(47) Genel terimleri aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$; (b) $a_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x^3}$;

(c) $a_n = \int\limits_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\sin^2 x}{x}dx$; (d) $a_n = \int\limits_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\cos^2 x}{x}dx$;

(e) $a_n = \int\limits_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\cos^2 x}{x^p}dx, (p > 0)$; (f) $a_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x^2}dx$;

(g) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)n^{-p}$, $(p > 0)$;

(h) $a_n = \left|\int\limits_{n^2}^{n^2+1} \sin x^2 dx\right|$; (i) $a_n = n^2 \int\limits_n^{n+1} \frac{x}{1+x^5}dx$;

(j) $a_n = n \int\limits_n^{n^2} \frac{x}{1+x^5}dx$; (k) $a_n = \frac{(1!+2!+\cdots+n!)^2}{(2n+2)!}$.

Cevap: (a) Yakınsak ; (b) Iraksak ; (c) Iraksak ; [(c) için Yol gösterme: (a_n) ve $\left(\frac{1}{\pi(n+1)}\right)$ dizilerini mukayese ediniz.] (d) Iraksak [(d) için Yol gösterme: (a_n) ve $\left(\frac{1}{\pi(n+1)}\right)$ dizilerini mukayese ediniz.]
(e) $p > 1$ için yakınsak, $0 < p \leq 1$ için ıraksak (f) Yakınsak,
(g) $p > 1$ için yakınsak, $0 < p \leq 1$ için ıraksak [(g) için Yol gösterme: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = c$] (h) Yakınsak [(h) için Yol gösterme: $\int\limits_a^{a+1} \frac{2x\sin x^2}{2x}$ integraline kısmi integrasyon formülünü uygulayınız.] (i) Yakınsak ;

(j) Yakınsak ; (k) Yakınsak [(k) için Yol gösterme: $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$].

(48) Genel terimleri aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$;

(b) $a_n = \frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}$;

(c) $a_n = \frac{5^n}{7^n-5^n}$;

(d) $a_n = \tan^{\alpha}\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$;

(e) $a_n = \sin\frac{1}{n^{\alpha}} \tan\frac{1}{n^{\beta}}, (\alpha, \beta > 0)$;

(f) $a_n = n^n \ln^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)$;

(g) $a_n = \tan\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \ln\frac{3n^2+1}{n^2+1}, (\alpha > 0)$;

(h) $a_n = \tan\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n^{\alpha}}$;

(i) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$;

(j) $a_n = \frac{\ln n+2}{n(\ln^3 n+1)}$;

(k) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^p\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$;

(l) $a_n = \frac{1}{2^{[[\log_2 n]]}}$;

(m) $a_n = \frac{1}{[[\lg_n]]}, (n \geq 15)$;

(n) $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}\ln^p n \ln^q(\ln n)}, (n \geq 10)$;

(o) $a_n = n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$;

(p) $a_n = \frac{(n-1)^3\sqrt[n]{2}}{n^4+3n^2+2}, (n \geq 2)$;

(q) $a_n = \left(\arcsin\frac{n}{n+3}\right)^n$;

(r) $a_n = \left(\arctan\frac{n^2}{n^2+4}\right)^{2n}$;

(s) $a_n = \frac{n^2}{5^n-3^n-2^n}, (n \geq 4)$;

(t) $a_n = \frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$;

(u) $a_n = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\right)^p, (\alpha > 0)$;

(v) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n^{\alpha}})^p$;

(w) $a_n = \left(1 - \sqrt[5]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^{\alpha}, (\alpha > 0)$;

(x) $a_n = \frac{\ln^3 n}{\sqrt[4]{5n^3+1}} \sin\frac{1}{n^p}, (p > 0)$;

(y) $a_n = (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2), (a > 0)$;

(z) $a_n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n^{\alpha}})}{\sqrt[3]{n^{\beta}+1}}, (\alpha, \beta > 0)$;

(xx) $a_n = a^{\frac{1}{n}} - a^{\sin\frac{1}{n}}, (a > 0)$;

(yy) $a_n = \left(\cosh\frac{1}{n} - 1\right)^p$;

(zz) $a_n = \left(\sinh\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^p$.

Cevap: **(a)** Yakınsak ; **(b)** Yakınsak ; **(c)** Yakınsak ; **(d)** $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \leq 1$ için ıraksak ; **(e)** $\alpha + \beta > 1$ için yakınsak, $\alpha + \beta \leq 1$ için ıraksak ; **(f)** Yakınsak ; **(g)** $\alpha > 1$ için yakınsak, $0 < \alpha \leq 1$ için ıraksak ; **(h)** $\alpha > \frac{1}{2}$ için yakınsak, $\alpha \leq \frac{1}{2}$ için ıraksak ; **(i)** Iraksak ; **(j)** Yakınsak ; **(k)** $p > \frac{1}{2}$ için yakınsak, $0 < p \leq \frac{1}{2}$ için ıraksak ; **(l)** Iraksak ; **(m)** Iraksak ; **(n)** $\alpha > 1; \alpha = 1, p > 1; \alpha = p = 1, q > 1$ için yakınsak, $\alpha < 1; \alpha = 1, p < 1; \alpha = p = 1, q < 1$ için ıraksak ; **(o)** $\forall a \neq 1$ için ıraksak ; **(p)** Iraksak ; **(q)** Iraksak ; **(r)** Yakınsak ; **(s)** Yakınsak ; **(t)** Iraksak ; **(u)** $p(1-\alpha) > 1$ için yakınsak, $p(1-\alpha) \leq 1$ için ıraksak ; **(v)** $\alpha = 1, p > 2$ için yakınsak, $\alpha \neq 1, \forall p; \alpha = 1, p \leq 2$

için ıraksak ; **(w)** $\alpha > 1$ için yakınsak, $0 < \alpha \leq 1$ için ıraksak ; **(x)** $p > \frac{1}{4}$ için yakınsak, $0 < p \leq \frac{1}{4}$ için ıraksak ; **(y)** $\forall a > 0$ için yakınsak ; **(z)** $\beta - 3\alpha > 3$ için yakınsak, $\beta - 3\alpha \leq 3$ için ıraksak ; **(xx)** $\forall a > 0$ için yakınsak ; **(yy)** $p > \frac{1}{2}$ için yakınsak, $p \leq \frac{1}{2}$ için ıraksak ; **(zz)** $p > \frac{1}{3}$ için yakınsak, $p \leq \frac{1}{3}$ için ıraksak .

(49) Leibnitz testinden yararlanarak aşağıda verilen serilerin koşullu yakınsak olduğunu gösteriniz.

(a) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}$; (b) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}}$; (c) $\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln^{25} n}{n}$;
(d) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}$; (e) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^{3,1}}{2^{\sqrt{n}}+n}$; (f) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+20}$.

(50) Abel veya Dirichlet testlerinden yararlanarak aşağıda verilen serilerin karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\sum_1^{\infty} \frac{\sin n}{3n+2}$; (b) $\sum_4^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$; (c) $\sum_1^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{\pi}{3})}{n-\ln^2(n+2)}$;
(d) $\sum_2^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$; (e) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$; (f) $\sum_1^{\infty} \frac{\sin(1+\frac{1}{n})}{\ln\ln(n+1)}$.

(51) Aşağıda verilen serilerin koşullu yakınsak ya da mutlak yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$; (b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

(c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln^2(n+1)}{2^n+3^n}$; (d) $\sum_{1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\sin\frac{1}{n}$;

(e) $\sum_{1}^{\infty} \cos(\pi\sqrt{n^2+n})$; (f) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

(g) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2\sin^2 n}$; (h) $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha \ln^\beta n}$;

(i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^p n \ln^q \ln(n+1)}$; (j) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \tan^p \frac{1}{n}, (p>0)$;

(k) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$; (l) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2}$;

(m) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; (n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n arccotn}{n^q}$;

(o) $\sum_{1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n+2})\cos\frac{1}{n}$; (p) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$;

(q) $\sum_{2}^{\infty}(-1)^n \frac{3+(-1)^n}{n\ln n}$; (r) $\sum_{1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{n^2}\right)$;

(s) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$; (t) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sin\frac{\pi n^q}{2n^q+1}\right), (q>0)$;

(u) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cos^2 n}{\sqrt{n^q+1}}, (q>0)$; (v) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}\sin\frac{n\pi}{6}$.

Cevap: **(a)** Koşullu yakınsak ; **(b)** Iraksak **(c)** Mutlak yakınsak ; **(d)** Koşullu yakınsak **(e)** Koşullu yakınsak ; **(f)** $p>2$ için mutlak yakınsak, $0<p\le 2$ için koşullu yakınsak ve $p\le 0$ için ıraksak ; **(g)** Mutlak yakınsak ; **(h)** $\alpha>1$ için mutlak yakınsak, $\alpha=1,\beta>1$ için mutlak yakınsak, $\alpha=1,\beta\le 0$ için koşullu yakınsak,$\alpha=0,\beta>0$ için koşullu yakınsak, $\alpha=0,\beta\le 0$ için ıraksak; $\alpha<0$ için ıraksak ; **(i)** $p>1$ ve herhangi q için mutlak yakınsak; $p=1,q>1$ içim mutlak yakınsak, $p=1,q\le 1$ için koşullu yakınsak ; $0<p<1$ ve herhangi q için koşullu yakınsak; $p\le 0$ ve herhangi q için ıraksak **(j)** $p>1$ için mutlak yakınsak $0<p\le 1$ için koşullu yakınsak ; **(k)** Mutlak yakınsak ;**(l)**Iraksak ; **(m)** Mutlak yakınsak ; **(n)** $q>0$ için mutlak yakınsak $-1<q\le 0$ için koşullu yakınsak; $q\le -1$ için ıraksak ; **(o)** Koşullu yakınsak ; **(p)**$\alpha>1$ için mutlak yakınsak, $0<\alpha\le 1$ için koşullu yakınsak; $\alpha\le 0$ için ıraksak ; **(q)** Iraksak ; **(r)** Koşullu yakınsak ; **(s)** $\alpha > \frac{1}{2}$ için mutlak yakınsak, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için koşullu yakınsak; $\alpha \leq 0$ için ıraksak ; **(t)** $q > 1$ için mutlak yakınsak, $q \leq 1$ için ıraksak ; **(u)** $q > 2$ için mutlak yakınsak, $0 < q \leq 2$ için koşullu yakınsak ; **(v)** Koşullu yakınsak .

(52) Aşağıda verilen serilerin koşullu veya mutlak yakınsak olup olmadıklarını gösteriniz.

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots$

(b) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \cdots$

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n} + \cdots$

(d) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$

(e) $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} - \frac{1}{11^p} - \cdots$

(f) $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots$

(g) $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \cdots$

Cevap: **(a)** Yakınsak ; **(b)** Iraksak ; **(c)** Mutlak yakınsak ; **(d)** Iraksak ; **(e)** $p > 1$ için mutlak yakınsak, $p < 1$ için ıraksak ; **(f)** $p, q > 1$ için mutlak yakınsak, $0 < p = q \leq 1$ için koşullu yakınsak ve p ve q nun diğer bütün değerleri için ıraksak ; **(g)** $p, q > 1$ için mutlak yakınsak, $0 < p = q \leq 1$ için koşullu yakınsak ve p ve q nun diğer bütün değerleri için ıraksak.

(53) $\alpha > 0,\ \beta > 0$ olsun. Yakınsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{ve} \quad \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}^\beta}$$

serilerinin Cauchy çarpım serisinin $\alpha+\beta > 1$ için yakınsak ve $\alpha+\beta < 1$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.

(54) Iraksak

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{ve} \quad 1 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{n}-1} (2^{\mathrm{n}} + 2^{-(\mathrm{n}+1)})$$

serilerinin Cauchy çarpım serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

(55) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif serisi ıraksak olsun. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{S_n}^{\alpha}}$ serisinin $\alpha > 1$ için yakınsak ve $\alpha \leq 1$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.

(56) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif serisi yakınsak ve $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olsun. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^{n}}$ serisinin $\alpha = 1$ için ıraksak ve $\alpha < 1$ için yakınsak olduğunu gösteriniz.

(57) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$; (b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2+3n+2}\right)$; (c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2}{9n^2-1}$;

(d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$; (e) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{4n+1}$; (f) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $(a > 0)$.

Cevap:

(a) Iraksak ; (b) Yakınsak ve değeri $\frac{1}{3}$ tür ;

(c) Yakınsak ve değeri $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$tür; (d) Yakınsak ve değeri $\frac{1}{4}$ tür ;

(e) Iraksak ; (f) Yakınsak ve değeri $a^{-\ln 2}$ dir .

(58) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların karakterlerini inceleyiniz.

(a) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$; (b) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$;

(c) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$; (d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}}$;

(e) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$; (f) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos(arccotn)$;

(g) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$; (h) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \arccos\left(\frac{n^{\alpha}-1}{n^{\alpha}}\right), (\alpha > 0)$;

(i) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a^n}{2^n}\right)$; (j) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+a) - \ln n}, (a > 0)$;

(k) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\right), (a \neq k\pi, k \in \mathbb{N})$; (l) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)\right], (p > 0)$.

Cevap: (a) Iraksak ; (b) Iraksak ; (c) Yakınsak ; (d) Iraksak ; (e) Yakınsak ; (f) Yakınsak ; (g) $\alpha > \frac{1}{2}$ için yakınsak, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için ıraksak ; (h) $o < \alpha \leq 2$ için ıraksak ; (i) $|a| < 2$ için yakınsak, $|a| \geq 2$ için ıraksak ; (j) Iraksak ; (k) Yakınsak ; (l) $p > \frac{1}{2}$ için yakınsak, $0 < p \leq \frac{1}{2}$ için ıraksak .

(59) Aşağıda verilen sonsuz çarpımların mutlak yakınsak ya da koşullu yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$; (b) $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$;

(c) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$; (d) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$;

(e) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right)$; (f) $\prod_{n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi}{4\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)}$, $(p > 0)$.

Cevap: **(a)** Iraksak ; **(b)** Iraksak ; **(c)** Koşullu yakınsak ; **(d)** $|x| < 2$ için mutlak yakınsak, $|x| \geq 2$ için ıraksak ; **(e)** Koşullu yakınsak ; **(f)** $p > 1$için mutlak yakınsak,$\frac{1}{2} < p \leq 1$ için koşullu yakınsak.

(60) (a) $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$;

(b) $\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)$;

(c) $\sinh x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$;

(d) $\cosh x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}\right)$.

eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.